Corso di Laurea in Fisica, Analisi (Canale D-K) 20-21
Prof. Galise

Esercizio 1 Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$x^3(1+x^2)(1-x^2), \qquad \frac{x+1}{x^2+1}, \qquad \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}, \qquad e^x(\sin x+\cos x), \qquad \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}, \qquad e^{\sqrt{x}}$$

$$\frac{1+\cos^2 x}{2\sin x}, \qquad \frac{\arcsin x}{1-x^2}, \qquad x^\alpha \ln x, \qquad x\arctan x, \qquad \sin(\sqrt{x^2+1}), \qquad \ln(1+e^{x^2})$$

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}, \qquad x^{x^x}, \qquad \frac{2}{\sqrt[5]{\arctan(3^{\sin x})}}, \qquad \arcsin\left(\frac{1}{1+\log^2 x}\right), \qquad 7^{\tan x}\arccos(\sin x)$$

Esercizio 2 Studiare la derivabilità in $x=0$ delle seguenti funzioni

$$|x|\,\sin x, \qquad |x|\,(x^2+1), \qquad x\,\sin(|x|), \qquad \sqrt{x}\,\sin x, \qquad (x^2+1)\sqrt{x}, \qquad |x|^\alpha,\ \alpha>0.$$

Esercizio 3 Studiare la derivabilità della funzione $\log(|x|)$ nel suo dominio e calcolarne la derivata.

Più in generale, sia $f(x)$ una funzione derivabile in un intervallo. Studiare continuità e derivabilità della funzione $\log(|f(x)|)$ nel suo dominio naturale e calcolarne la derivata.

Esercizio 4 Sia

$$f(x)=\begin{cases} x\sin(1/x) & x\neq 0\\ 0 & x=0,\end{cases}$$

Dire se la funzione f è continua ed è derivabile in $\mathbb{R}$. Ripetere l'esercizio per la funzione

$$g(x)=\begin{cases} x^2\sin(1/x) & x\neq 0\\ 0 & x=0.\end{cases}$$

La derivata di g è continua in $\mathbb{R}$? È derivabile in $\mathbb{R}$ la funzione $h(x)=|x|^\alpha\sin(1/x)$, se $x\neq 0$, $h(0)=0$, se $\alpha\in(1,2)$?

Esercizio 5 Sia $f(x)=\sqrt{1+4x^2}$ definita in $x\in\mathbb{R}$.
i. Determinare l'insieme dei punti di derivabilità della funzione f.
ii. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nei punti $(1,f(1))$ e $(-2,f(-2))$.
iii. Trovata l'equazione della retta tangente in un punto generico $(x_0,f(x_0))$, dire per quali valori x_0 la tangente è orizzontale e per quali è parallela ad una delle bisettrici $y=x$ e $y=-x$.

Esercizio 6 Determinare i valori di α, β per i quali risultino derivabili le seguenti funzioni:

$$f(x)=\begin{cases} \alpha\sin x & x<0\\ \beta & x=0\\ e^x-1 & x>0,\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} \cos(\alpha x) & x<0\\ \beta & x=0\\ e^{-x^2/2} & x>0,\end{cases}$$

Esercizio 7 La funzione $f(x)=3\,x+\arctan x+1$ è invertibile? Qual Ã¨ il dominio dell'inversa f^{-1}. Calcolare $(f^{-1})'(1)$.

Esercizio 8 Dire se esistono massimo e minimo della funzione $f(x)=\ln\left(2+\cos^2 x\right)$ nell'intervallo $[4,5]$ e, in caso affermativo, calcolarli.

Esercizio 9 Si provi che l'equazione

$$2\,x^2 = x\,e^{-x}$$

ammette una ed una sola soluzione positiva in $\mathbb{R}$.

Esercizio 10 Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{per } x \in [0,1] \\ x^2 - \lambda\, x + \lambda & \text{per } x \in (1,2] \end{cases}$$

si determini il parametro reale λ in modo che sia applicabile in $[0,2]$ il Teorema di Lagrange e si calcolino i punti di cui il teorema afferma l'esistenza.

Esercizio 11 Sia

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}.$$

Si consideri un intervallo $I = \left[\frac{1}{4}, a\right]$, per $a > \frac{1}{4}$. Si determini a in modo che sia applicabile a I il Teorema di Rolle, e si trovino i corrispondenti punti ξ di cui il teorema afferma l'esistenza.

Esercizio 12 Sia f un funzione derivabile in $(0,+\infty)$ e continua in 0. Si supponga che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(0).$$

Si provi che esiste $\xi \in (0,+\infty)$ tale che $f'(\xi) = 0$.

Esercizio 13 Usando il Teorema di Lagrange, dimostrare che

$$\begin{aligned} |\arctan x - \arctan y| &\le |x-y|, && x,y \in \mathbb{R}, \\ |e^x - e^y| &\le 3\,|x-y| && x,y \in (-1,1), \\ |e^{-x^2} - e^{-y^2}| &\le |x-y| && x,y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Esercizio 14 Dimostrare che le seguenti funzioni sono strettamente crescenti

$$f(x) = e^x(x^2 - 2x + 4), \qquad g(x) = \frac{1}{42}\,x^7 - \frac{1}{2}\,x^2 + x + 1.$$

Esercizio 15 Provare che valgono le seguenti disuguaglianze:

$$1 + x \le e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad\qquad \ln(1+x) \le x \qquad \forall x > -1.$$

VeroFalso

Esercizio 16 Sia $f(x)$ una funzione definita e di classe C^1 in $\mathbb{R}$.

1. $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+2h)-f(x-2h)}{4h} = f'(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. se $f(0) < 0$ allora esiste $c \in (0,1)$ tale che $f(1) < f'(c)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. se esiste finito $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ allora $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. se $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ allora essite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 17 Sia $f(x)$ una funzione definita e di classe C^1 in $\mathbb{R}$ con $f(0) = 0$

1. la funzione $g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}$ può essere prolungata con continuità in 0 $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. se f è monotona crescente allora lo è anche g $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. se f è un infinitesimo di orrdine superiore a x per $x \to 0$ allora g è derivabile in 0 $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 18 Sia $f(x)$ una funzione definita e di classe C^1 in $\mathbb{R}$, $[a,b]$ un intervallo fissato con $c \in (a,b)$. Supponiamo che $f(a) = f(b) = f(c)$

1. la funzione f ha esattamente due punti con derivata nulla in (a,b) $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. se $f'(c) > 0$ e $m \in (0, f'(c))$ allora esiste $d \in (a,b)$ con $f'(d) = m$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. se $f'(c) = 0$ allora c è un punto di massimo o minimo relativo $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. se a, b, c sono punti di massimo assoluto in $[a,b]$ per f allora f è costante $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$